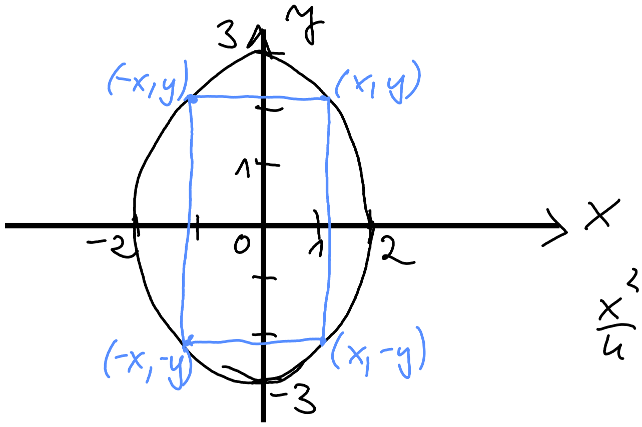
Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Rysunek:



dla $x = 0$ $y^2 = 9 \Rightarrow y = 3 \vee y = -3$

dla $y = 0$ $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$

(x, y) – punkt elipsy w I ćwiartce, $y > 0, x > 0$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}}$

pole prostokąta: $P = 2x \cdot 2y = 4x \cdot \sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}} = 12x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = 12\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{4}}$

dziedzina: $x > 0$ i $x < 2$ $\Rightarrow x \in (0; 2)$

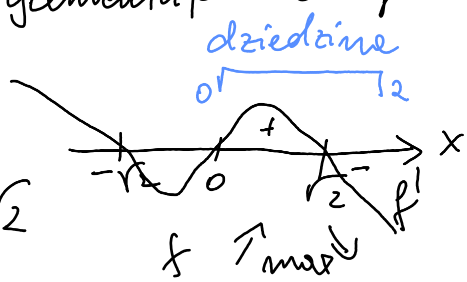
Szukam maksimum funkcji $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{4}$

pierwiastek jest f. rosnącą, więc ekstrema będą te same, podobnie mnożenie przez 12 nie zmienia argumentu, dla którego jest ekstremum

$f'(x) = 2x - \frac{4x^3}{4} = 2x - x^3 = 0$

$x(2 - x^2) = 0$

$x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$



dla $x < \sqrt{2}$ $f \nearrow$, dla $x > \sqrt{2}$ $f \searrow$

stąd $x = \sqrt{2}$ – max. lokalne; funkcja f dla $x \in (0; 2)$ jest ciągła oraz rośnie od 0 do $\sqrt{2}$ i maleje od $\sqrt{2}$ do 2, stąd $x = \sqrt{2}$ to max. globalne.

Obliczam wymiary prostokąta:

$2x = 2\sqrt{2}$ $\quad y = \sqrt{9 - \frac{9x^2}{4}} = \sqrt{9 - \frac{9 \cdot 2}{4}} = \sqrt{9 - \frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$2y = 3\sqrt{2}$

odp.: Wymiary prostokąta o największym polu to $2\sqrt{2}$ i $3\sqrt{2}$.